კოჭების პლასტიკური ღუნვის ანალიზი, შემდგომი დრეკადი განტვირთვის გათვალისწინებით

თამაზ ზაციკაძე
საქართველოს ტექნიკურის უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის პროფესორი
რუსუდან გიორგობიანი
საქართველოს ტექნიკურის უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი

DOI: https://doi.org/10.52340/gbsab.2026.57.11

საკვანძო სიტყვები: პლასტიკური თუნვა, მხები ძაბვები, ნორმალური ძაბვები, განივი დეფორმაცია.

პლასტიკური ღუნვის ანალიზის დროს წარმოქმნილი სიძნელეები შესაძლებელია შევაფასოთ სუფთა ღუნვის განხილვისას სწორკუთხა განიკვეთის ძელისთვის, რომელსაც ერთი რიგის სიგანე და სიმაღლე აქვს. თუ R ნეიტრალური ღერძის სიმრუდის რადიუსია ღუნვის სიბრტყეში, მაშინ მართობი სიბრტყისთვის სიმრუდე ტოლი იქნება μ/R სადაც μ პუასონის კოეფიციენტია. ღუნვის პროცესის გაგრძელების შემთხვევაში ჯერ ის ბოჭკოები დეფორმირდება პლასტიკურად, რომლებიც ძელის სიმეტრიის ღერძიდან უფრო დაშორებულია, ხოლო შემდეგ პლასტიკური დეფორმაციები თანდათან გავრცელდება შუისკენ; თუმცა პუასონის კოეფიციენტი შეიცვლება განივი კვეთისთვის. დრეკადი დეფორმაციებისთვის ის 0,3-ის ტოლია, ხოლო პლსტიკურისთვის - 0,5. იმისათვის, რომ მივიღოთ დეფორმაციის აუცილებელი უწყვეტობა დრეკადი და პლასტიკური დეფორმაციების საზღვარზე, საჭიროა შევინარჩუნოთ ზოგიერთი განივი დეფორმაცია. ამის გადასალახად ზოგიერთი ავტორი გვთავაზობს მასალის უკუმშვადობას ე.ი. μ =0.5 დრეკადი და პლასტიკური დეფორმაციებისთვის; ამით მათემატიკური ანალიზი მარტივდება, მაგრამ რეალური მასალებისთვის ეს ექვივალენტურია განივი ძაბვების უარყოფისა. ეს ვრცელდება განივ ღუნვაზეც, ანუ ჩათვლილია, რომ მხები ძაბვები მცირეა ნორმალურთან შედარებით. ეს რა თქმა უნდა სრულდება, როდესაც ძელის სიგრძე ბერვრად აღემატება განიკვეთის ზომებს. ასეთივე ვარაუდი კეთდება პლასტიკური ღუნვისას. წინამდებარე ნაშრომში არის მცდელობა მსგავსი ამოცანების ამოხსნისას თავი დავაღწიოთ ამ უზუსტობას.

ძირითადი ნაწილი

განვიხილოთ სწორკუთხა განივკვეთის კოჭი არაგანმტკიცებადი მასალისაგან, რომელიც იტვირთება ისე, რომ განიკვეთი დრეკადპლასტიკურია. ამისათვის აუცილებელია მღუნავი მომენტი ტოლი იყოს $bh^2y/4$ (ნახ.1) კოჭის განტვირთვა ექვივალენტურია ასეთივე სიდიდის $bh^2y/4$ უარყოფითი მომენტის დამატებისა. კოჭი უცებ გასწორდება ან დრეკადი ზამბარისებურად იქცევა. უნდა ვივარაუდოთ, რომ გასწორებული კოჭის ყველა ფენა იქნება დრეკადი. ეს თუ ასეა, მაშინ ზამბარისებური ქცევისას დრეკადი დეფორმაციები ნეიტრალური ღერძიდან დაშორების

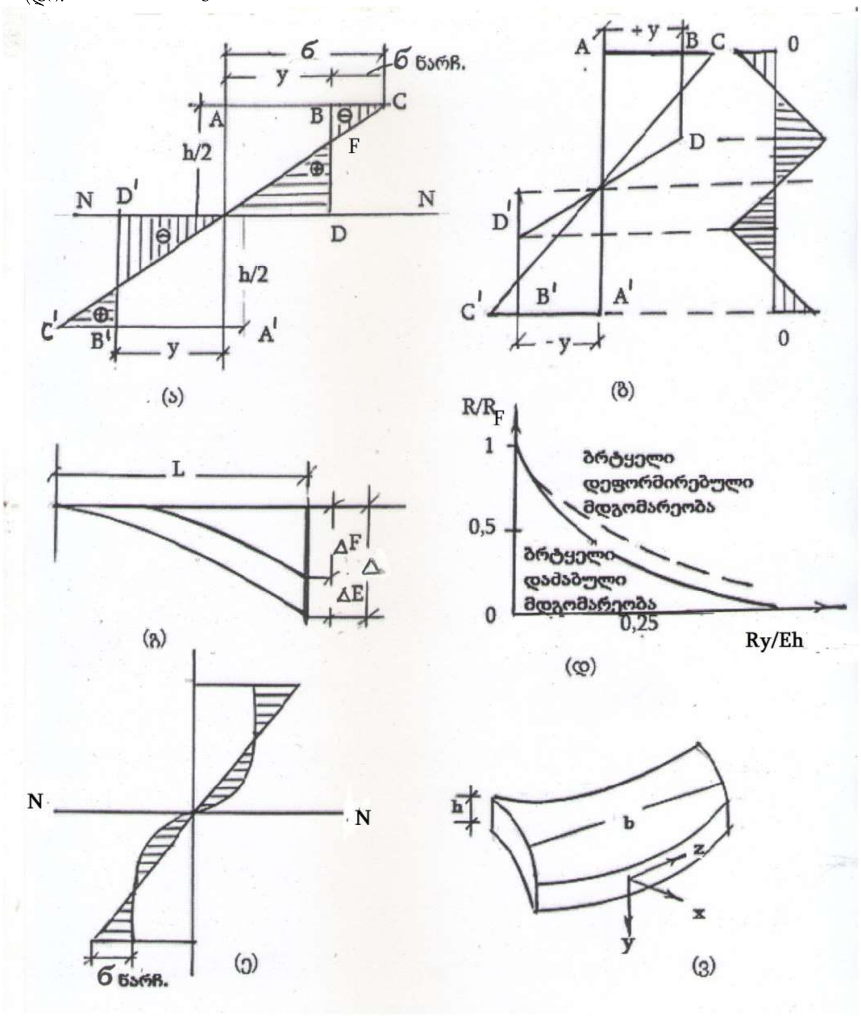
პროპორციულად იცვლება. დრეკადი ზამბარისებური ქცევის შედეგად მიღებული ძაბვები ბევრად მეტია ნეიტრალური ღერძიდან დაშორებული შრეებისთვის, ხოლო ნეიტრალური ღერძის მახლობლად ძაბვები შეუდარებლად ნაკლებია.

ასეთი განტვირთვა წარმოდგენილია ნახაზზე 1 (ა). cc_1 წრფე OAC სამკუთხედის ფართობის მომენტი NN -ის მიმართ უნდა იყოს ისეთივე, როგორიც OABD სწორკუთხედის ფართობის მომენტი. ადვილი საჩვენებელია, რომ σ(განტ.)=3Y/2. ნარჩენი ძაბვების განაწილება ნაჩვენებია დაშტრიხვით. აქედან გამომდინარეობს, რომ კოჭის ფენებში F და B, F^{1} და D^{1} უნდა არსებობდეს კუმშვის ნარჩენი ძაბვები, ხოლო F და D, F^{1} და B^{1}-შიგაჭიმვის ნარჩენი ძაბვები; BF/FD=1/2 ან BF და $B^1 F^1$ შეადგენენ კოჭის მთელი სისქის 1/6 -ს .

ეხლა შევისწავლოთ აღნიშნელი კოჭის ზამბარისებური ქცევა. ამისათვის განვიხილოთ ორი მოვლენა 1) ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა, 2) ბრტყელი დეფორმაცია.

ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობა

იდეალურად დრეკად-პლასტიკური მასალის კოჭში ნარჩენი ძაბვები, როდესაც $M_{(დრ.)} < M < M_პ$ განისაზღვრება ისევე, როგორც M=M_პ, ნახ. (1ბ)-ზე ნაჩვენებია



ნახ.1

(ABDOD'B'A'A) M-ის მოქმედების შედეგად აღძრული ძაბვის გამაწილების ეპიურა; ეპიურა ACOC' A' A წარმოადგენს დრეკადი ზამბარისებური ქცევისას ძაბვების განაწილებას M მომენტის განტვირთვისას.

დრეკადპლასტიკური ღუნვის დროს თუ კოჭის ნეიტრალური ღერძის სიმრუდის რადიუსია-R, მაშინ Y/R=Y/E , შესაბამისად თუ ჩავსვავთ Y მღუნავი მომენტის განტოლებაში

$$M=y\cdot b(3h^2-4y^2)/12 \quad (1)$$

მივიღებთ

$$M=b(3h^2\, y-4y^3\, hR^2/E^2)/12(2)$$

ზამბარისებური ქცევის შედეგად სიმრუდის რადიუსი იქნება $R_{(დრ.)}$ და შესაბამისად

$$M=EI/R=Ebh^2/12R_{(დრ.)}(3)$$

ნახ (1ბ)-ზე ნაჩვენებია კოჭი, რომელიც M- ის მოქმედების შედეგად მიიღებს Δ ჩაღუნვას. დრეკადი ზამბარისებური ქცევის განტვირთვისას გვექნება Δდრ, მაშინ ნარჩენი ჩაღუნვა $\Delta_F= \Delta-\Delta_{(დრ.,)}$ და რადგანაც $\Delta 2R\approx L^2$,,მაშინ

$$1/R_F =1/R-1/R_E \qquad ან \quad R/R_F =1-1/R_F \qquad (4)$$

სადაც R_F ნარჩენი სიმრუდის რადიუსია. (2) და (3) -ის ამოხსნით და მიღებული შედეგების (4)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$R/R_F =1-3((y\cdot R)/Eh)+4((y\cdot R)/Eh)^3 \qquad (5)$$

$$R/R_F =((y\cdot R)/Eh+1)\ (2\ (y\cdot R)/Eh-1)^2 \qquad (6)$$

როდესაც R/R_F =0, ეს სრული ზამბარისებური ქცევაა, ანუ ღუნვა სრულად დრეკადია; თუ R/R_F =1, მაშინ ზამბარისებური ქცევა არ ხდება. (ნახ. 1 დ)-ზე ნაჩვენებია დამოკიდებულება R/R_F გამომდინარე yR⁄Eh

ბრტყელი დეფორმაცია

ზემოთ განვიხილეთ ძელის ღუნვა ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობისას, როდესაც b და h პირობითად ტოლი იყო და ამიტომ ბრტყელი ღუნვის მართობ სიბრტყეში დიდი დეფორმაციები არ ჩნდებოდა. თუ b ბევრად აღემატება h-ს, მაშინ განიკვეთის სიმრუდის რადიუსი 0-ის ტოლია, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ კოჭის ორ განაპირა მხარეს. კოჭის დიდი ნაწილი ბრტყელია (ნახ. 1 ვ), ამიტომ დეფორმაცია , l_z, b-ს, ან z-ის მიმართულებით 0-ის ტოლია.

დრეკადი დეფორმაციებისათვის

$$l_z=0={}^{\sigma z-\mu\sigma\_x}/E \qquad (7)$$

σ_y ყოველთვის ნულისგან განსხვავებულია, μ პუასონის კოეფიციენტია

$$l_x=\sigma_z-\sigma_{z-\mu\sigma x}\ /E=Y/R$$

შესაბამისად

$$\sigma_x=Ey/R+\mu\sigma_x \qquad (8)$$

σ_z ჩავსვათ მე-4-დან მე-8-ში გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ

$$\sigma_z=Ey/((1-\mu^2\ )\cdot R)$$

ამიტომ

$$M_E=\int\_(-h/2)(h/2)\sigma_x\ Ydy=(Eh^3)/12R(1-\mu^2) =(E'\, h^3)/12R \qquad (9)$$

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ ბრტყელი დეფორმაციისას ჩვენ E ს ნაცვლად უნდა გამოვიყენოთ $E/(1-\mu^2\ ) =E'$ ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის შესაბამისად.

მაშინ ღუნვის ბრტყელი დეფორმაციის გამოსახულება (6)-ის ექვივალენტურია.

$$R/R_F = 1-3(yR/Eh)(1-\mu^2) + 4[yR/Eh(1-\mu^2)]^3 \qquad (10)$$

რაც გრაფიკულად არის ნაჩვენები ნახ. (1დ). უნდა აღვნიშნოთ, რომ დენადობის ტოლია (2/√3)y ხოლო ტრესკას პირობიდან - y. ჩვენს მიერ ექსპერიმენტულად დადგენილია, რომ ბოლო შედეგი შეესაბამება რბილი ფოლადის მარტივ ღუნვას.

ზღვარი ბრტყელი დეფორმაციის დროს ღუნვისას მიზესის პირობის მიხედვით ჩვენ დავადგინეთ, რომ ნარჩენი ძაბვები კოჭში შესაძლებელია შევაფასოთ იმავე გზით, რეალური ძაბვა-დეფორმაციის მრუდის გამოყენებით, თუმცა ნარჩენი ძაბვების ეპიურების აგებისთვის საჭირო გამოთვლები ძალიან შრომატევადია. აღნიშნული გამოთვლები განსაკუთრებით იმ შემთხვევაშია მართებული, როდესაც ნარჩენი ძაბვები ნაკლებია მასალის დენადობის ზღვარზე განმეორებითი დატვირთვისას სხვა ნიშნის მომენტით. ამ შემთხვევაში თავდაპირველი დენადობის ზღვარი იქნება უფრო მცირე, ამიტომ არ არის სასურველი ბაუშინგერის ეფექტის დამატება. პრინციპში არ შეიქმნება განსაკუთრებული სიძნელეები არა სწორკუთხა კოჭების ღუნვისას, რომელთა შესწავლაც მომავალში გვაქვს დაგეგმილი.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. თ. ბაციკაძე, ა.კვარაცხელია,ზ.მამაღუა დრეკადობის, პლასტიკურობის და ცოცვადობის თეორიის მოკლე კურსი. ,,ტექნიკური უნივერსიტეტი“ თბილისი 2014 წ.
2. Т. Бацикадзе, Дж. Нижарадзе Основы теории упругости и пластичности (I часть) ,,Технический университет''.   Тбилиси 2015 г.
3. თ. ბაციკაძე,ჯ. ნიჟარაძე პლასტიკური პოტენციალის გამოყენება დენადობის თეორიაში . სამეცნიერო-ტექნიკური ჟურნალი ,,მშენებლობა'' სტუ თბილისი 2023 წ.
4. თ. ბაციკაძე,ჯ. ნიჟარაძე, რ.გიორგობიანი უწყვეტი გარემოს სივრცითი ობიექტების პლასტიკური დენადობის ერთი პრობლემის შესახებ. საერთაშორისო სამეცნიერო-ტექნიკური კონფერენცია სტუ 14-16 მაისი 2025 წ.

რეზიუმე

კოჭის პლასტიკური ღუნვა ერთი შეხედვით თითქოს ადვილად უნდა დაექვემდებაროს მათემატიკურ ანალიზს. რეალურად ზუსტი გადაწყვეტა ჯერ კიდევ უცნობია და ყველა არსებული თეორიები, რომლებიც ეყრდნობა დაშვებებს, სხვადასხვა ხარისხით აზუსტებენ შედეგებს. ეს მიახლოებითი თეორიები ძალზე სასარგებლოა. თუ მათი გამოყენება მოხდება გარკვეული დაშვებებით და ექსპერიმენტულად შემოწმებული კერძო შემთხვევებისთვის. განივი ღუნვისას, ჩათვლილია, რომ მხები ძაბვები მცირეა ნორმალურთან შედარებით. ეს სრულდება, როდესაც ძელის სიგრძე ბერვრად აღემატება განიკვეთის ზომებს. იგივე ვარაუდი კეთდება პლასტიკური ღუნვისას. ნაშრომში მოცემულია მცდელობა მსგავსი ამოცანების ამოხსნისას ავერიდოთ ამ უზუსტობას.

ANALYSIS OF THE PLASTIC BENDING OF BEAMS, TAKING INTO ACCOUNT SUBSEQUENT ELASTIC UNLOADING

Abstract

At first glance, the plastic bending of a beam might seem easily subject to mathematical analysis. In reality, a precise solution remains unknown, and all existing theories, which rely on certain assumptions, refine results to varying degrees of accuracy. These approximate theories are highly useful if applied within specific assumptions and for experimentally verified individual cases.

In transverse bending, it is generally assumed that shear stresses are minor compared to normal stresses. This holds true when the length of the beam significantly exceeds its cross-sectional dimensions. The same assumption is made during plastic bending. This paper presents an attempt to avoid such inaccuracies when solving similar problems.