თეიმურაზ გიორგაძე
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზოგიერთი ტიპის ამოცანები ალბათობის თეორიიდან

DOI: 10.52340/erp.2024.05.18

აბსტრაქტი

სტატიაში განვიხილეთ დისკრეტული ტიპის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის სტრუქტურა n ნაწილაკის M დანაყოფში განლაგების ამოცანაში. ასეთი სახის ამოცანებთან საქმე გვაქვს სტატისტიკურ ფიზიკაში, როცა სწავლობენ n ნაწილაკის (ესენი შეიძლება იყოს პროტონები, ნეიტრონები ან სხვა ნაწილაკები) M მდგომარეობაში (ეს შეიძლება იყოს ენერგეტიკული დონეები) განაწილების საკითხებს.

განვიხილეთ სხვადსხვა ტიპის რამდენიმე ამოცანა და გამოვთვალეთ ყველა სესაზლო ელემენტარულ ხდომილობატა რაოდენობა.

საკვანძო სიტყვები: დისკრეტული, დალაგებული, კომბინატორული, პროტონები; ნეიტრონები, კომპლექსური რიცხვების მნიშვნელობა მათემატიკაში.

განვიხილოთ დისკრეტული ტიპის ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის სტრუქტურა n ნაწილაკის (ბურთულას) M დანაყოფში (ყუთში) განლაგების ამოცანაში. ასეთი სახის ამოცანებთან საქმე გვაქვს სტატისტიკურ ფიზიკაში, როცა სწავლობენ n ნაწილაკის (ესენი შეიძლება იყოს პროტონები, ნეიტრონები ან სხვა ნაწილაკები) M მდგომარეობაში (ეს შეიძლება იყოს ენერგეტიკული დონეები) განაწილების საკითხებს. ვიგულისხმოთ, რომ დანაყოფები გადანომრილია ნომრებით 1; 2;...; M და დავუშვათ, რომ ნაწილაკები გარჩევადია (განსხვავებულია, აქვთ ნომრები 1; 2;... n). მაშინ n ნაწილაკის M დანაყოფში განაწილება სრულიად აღიწერება დალაგებული ერთობლიობით (a1; a2;…; ai;…; an), სადაც ai წარმოადგენს იმ დანაყოფების ნომერს, რომელშიც მოხვდა ნაწილაკი i. თუკი განვიხილავთ განურჩეველ ნაწილაკებს, მაშინ მათი განაწილება M დანაყოფში სრულიად აღიწერება დაულაგებელი ერთობლიობით [a1; a2;…; ai;…; an], სადაც ai იმ დანაყოფის ნომერია, რომელშიც მოხვდა ნაწილაკი i -ურ ნაბიჯზე.

გვაქვს შემდეგი მაგალითების ტიპები:

I. კურსზე, რომელზეც სამი ჯგუფია, ჯგუფხელების არჩევის ყველა შესაძლო ვარიანტების რიცხვია n1n2n3; სადაც ni (i=1;2;3) i-ურ ჯგუფში სტუდენტების რაოდენობაა (ვიყენებთ ნამრავლის წესს).

II. რაოდენობა ყველა შესაძლო კომბინაციების, რამდენნაირადაც შესაძლებელია m მგზავრი განვათავსოთ n vagonSi tolia nm (დალაგებული ამორჩევა დაბრუნებით).

III. m ადამიანის დაბადების დღეების ყველა შესაძლო კომბინაცია (იმ პირობით, რომ თითოეულის დაბადების დღე არის რომელიმე 365 დღიდან, ე.ი. ცნობილია, რომ არცერთი მათგანი არ არის დაბადებული 29 თებერვალს) ტოლია 365m (საქმე გვაქვს ამორჩევასთან დაბრუნებით, ამასთანავე ამორჩევები ითვლება დალაგებულად, სადაც M=365 და n=m).

IV. რაოდენობა ყველა შესაძლო კომბინაციების, რამდენნაირადაც შესაძლებელია 5 ბურთი განვათავსოთ 5 ყუთში, ისე რომ ერთ ყუთში იყოს ერთი ბურთი, ტოლია S! -ის (ნამრავლის პრინციპის თანახმად).

V. პარტიების რაოდენობა, რომელიც უნდა შედგეს n მონაწილისაგან შემდგარ წრიულ საჭადრაკო ტურნირში ტოლია Cn2=n(n-1)2 (დაულაგებელი ამორჩევა დაბრუნების გარეშე).

განვიხილოთ შემდეგი ტიპის ამოცანები:

ამოცანა 1 (დამთხვევებზე). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ ა) m შემთხვევით არჩეული ადამიანების ჯგუფიდან დაბადების დღეები არ დაემთხვევა ერთმანეთს (იმ პირობით, რომ ყველა დღე (გარდა 29 თებერვლისა) ტოლალბათურია); ბ) m შემთხვევით არჩეულოი ადამიანების ჯგუფში მოიძებნება ორი მაინც ისეთი, რომელთა დაბადების დღეები დაემთხვევა ერთმანეთს.

ამოხსნა. ა) ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცე შეესაბამება დალაგებულ ამორჩევებს დაბრუნებით, სადაც M=365 და n=m, ანუ =365m; ხოლო ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებები კი დალაგებულ ამორჩევებს დაბრუნების გარეშე, სადაც M=365 და n=m, ამიტომ მათი რაოდენობაა - A365m. შესაბამისად, ალბათობის კლასიკური განმარტების თანახმად, გვაქვს: P(m=A365m365m=1-13651-2365…(1-m-1365).

ბ) საწინააღმდეგო ხდომილობის ალბათობის გამოთვლის წესის თანახმად კი გვაქვს: Qm=1-A365m365m. მოვიყვანოთ ამ ალბათობის მნიშვნელობების ცხრილი ზოგიერთი m-ის შემთხვევაში:

m	4	16	22	23	40	64	70
Qm	0,01636	0,2836	0,47569	0,5073	0,89123	0,99711	0,99916

საინტერესოა აღინიშნოს, რომ (მოლოდინის საწინააღმდეგოდ) ადამიანთა რაოდენობა, რომელშიც 0,5-ის ტოლი ალბათობით მოიძებნება ორი ადამიანი მაინც ერთი და იგივე დაბადების დღეებით, არც ისე დიდია: იგი ტოლია მხოლოდ 23-ის.

ამოცანა 2 (მოგება ლატარეაში). გვაქვს M ცალი ლატარიის ბილეთი, გადანომრილი ერთიდან M-მდე, რომელთაგან n ცალი ბილეთი ნომრებით ერთიდან n-მდე მომგებიანია (M≥2n). ვყიდულობთ n ცალ ბილეთს. რას უდრის ალბათობა იმისა, რომ ამ n ნაყიდი ბილეთიდან ერთი მაინც იქნება მომგებიანი (აღვნიშნოთ ეს ხდომილება A-თი)?

ამოხსნა. რადგან ბილეთების ამოღების ყიდვის) თანმიმდევრობას არა აქვს მნიშვნელობა ნაყიდ ბილეთებში მომგებიანი ბილეთების არსებობის ან არარსებობის თვალსაზრისით, ამიტომ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცეს ექნება შემდეგი სტრუქტურა:

={ω:ω=a1;a2;…;an:akai k≠i; ai=1;2;…;M}

შესაბამისად, გვექნება: =CMn.

ხდომილებას (აღვნიშნოთ იგი B0-ით), რომ ნაყიდ ბილეთებში არ არის მომგებიანი ბილეთები, ექნება შემდეგი სტრუქტურა:

B0={ω:ω=a1;a2;…;an:akai, k≠i; ai=n+1;…;M}

და B0=CM-nn.

ამიტომ PB0=CM-nnCMn=1-nM1-nM-1…(1-1M-n+1).

შესაბამისად საძებნი ალბათობა იქნება:

PB=1-PB0=1-1-nM1-nM-1…(1-1M-n+1).

ამოცანა 3 (ურთიერთობის უპირატესობაზე). დავუშვათ კლასში სადაც 10 მოსწავლეა ტარდება გამოკითხვა, სადაც თითოეულმა მოსწავლემ ანკეტაში უნდა მიუთითოს ის სამი ამხანაგი, რომელსაც აძლევს უპირატესობას ცხრა ამხანაგიდან. A იყოს ხდომილება იმისა, რომ ერთერთი მოსწავლე დასახელებული იქნა ყველა შესაძლო ცხრა ანკეტაში. ვიპოვოთ A ხდომილების მოხდენის ალბათობა თუ ანკეტების შევსება იყო შემთხვევითი, ანუ ანკეტის შევსების ნებისმიერი კომბინაცია ტოლალბათურია.

ამოხსნა. ცალკეული მოსწავლისათვის ანკეტის შევსების სხვადასხვა კომბინაციაათა რაოდენობა ტოლია C93-ის, ხოლო 10 ანკეტის შევსების ვარიანტების რაოდენობა პირველი მაგალითის ანალოგიურად ტოლია (C93)10-ის. ვინაიდან ერთი ანკეტა შეიძლება შევვსებულ იქნას ნებისმიერად, ხოლო დანარჩენ ცხრა ანკეტაში ერთი პასუხი დაფიქსირებულია, ხოლო დანარჩენი ორი პასუხი კი შეიძლება ნებისმიერად ამოირჩეს რვა შესაძლებელი პასუხიდან, ამიტომ ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა A-Si ტოლია A=C93(C82)9, აქედან ნამრავლის პრინციპის თანახმად გვაქვს: PA=C92(C82)9(C93)10=(C82C93)9=139.

ამოცანა 4 (ორ „ტუზზე“). განვიხილოთ პრეფერანსის თამაში, როდესაც კარტის შეკვრის მაღალი 32 კარტი შემთხვევით ნაწილდება (რიგდება) სამ მოთამაშეს შორის, ისე რომ თითოეული ღებულობს 10 კარტს და ორი კარტი ინახება „ბანკში“ (ანუ რჩება სათამაშო მაგიდაზე). ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ „ბანკში“ აღმოჩნდება ორი „ტუზი“.

ამოხსნა. ორი კარტის სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც შეიძლება აღმოჩნდეს „ბანკში“ ტოლია C322=496. კარტის შეკვრაში 4 „ტუზია“ და სხვადასხვა კომბინაციების რაოდენობა, რომელიც მოგვცემდა ორ „ტუზს“ ტოლია C42=6. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია C42C322=6496≈0,012.

ამოცანა 5 (მხედველობით მოძებნაზე). დავუშვათ გვაქვს N ცალი შემთხვევით დალაგებული გეომეტრიული ფიგურა, რომელთა შორის M ცალი მართკუთხედია (M≤N). მოითხოვება მოიძებნოს ყველა მართკუთხედი, თუ ძებნა წარმოებს ელემენტების (ფიგურების) სათითაოდ სკანირებით ფიქსაციის მოცულობით ერთი ელემენტი, ამასთანავე ხდება დაკვირვებული ელემენტის პოზიციის დამახსოვრება და მას თავიდან აღარ ვუბრუნდებით. ვიპოვოთ ალბათობა იმისა, რომ დამკვირვებელი შეძლებს აღმოაჩინოს ყველა M მართკუთხედი არაუმეტეს n დაკვირვებისას (n=M,…,N)?

ამოხსნა. ყველა შესაძლო ელემენტარულ ხდომილებათა რაოდენობა იქნება =CNn. ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებები ისეთი [a1;a2;…;an] ერთობლიობებია, რომლებშიც M ადგილას განთავსებულია მართკუთხედები (ამის შესაძლებლობათა რაოდენობაა CMM), ხოლო დანარჩენ N-M ადგილას კი არა მართკუთხედები (ამის შესაძლებლობათა რაოდენობაა CN-Mn-M). ამიტომ პირველი მაგალითის ანალოგიურად

ხელშემწყობი ელემენტარული ხდომილებების რაოდენობა იქნება CMMCN-Mn-M. შესაბამისად, საძიებელი ალბათობა ტოლია:

PMn=CMMCN-Mn-MCNn=CN-Mn-MCNn=CnMCNM.

Teimuraz Giorgadze
Akaki Tsereteli State University

Some types of problems from probability theory

Abstract

In the article, we discussed the structure of the space of elementary motions of the discrete type in the problem of placing n particles in the partition M. We deal with such problems in statistical physics, when studying the distribution of n particles (these can be protons, neutrons or other particles) in M states (these can be energy levels).

We have considered several tasks of different types and have calculated all the sesaslo elementary movement quantities.

Key words: discrete, arragenged,combined, protons, neutrons, meaning of complex numbers in mathematics.