ვლადიმერ ადეიშვილი
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ივანე გოქაძე
ანდრია რაზმაძის სახელობის ქალაქ ქუთაისის №41 ფიზიკა - მათემატიკის საჯარო სკოლა

საოლიმპიადო შინაარსის უტოლობების ჭეშმარიტების დამტკიცების ერთი ხერხის შესახებ

DOI: 10.52340/erp.2024.05.17

აბსტრაქტი

ნაშრომში განხილულია გარკვეული კატეგორიის უტოლებები და მათი ამოხსნა/დამტკიცების ერთ არასტანდარტული მეთოდი, რომელიც გულისხმობს იმას, რომ თუ დასამტკიცებელია უტოლობა fa+fb+fc+…≥1, მაშინ შევეცდებით შევარჩიოთ ისეთი k რიცხვი, რომ სამართლიანი იყოს უტოლობები: faakak+bk+ck+…; fbbkak+bk+ck+…; fcckak+bk+ck+… და შემდეგ ამ ჭეშმარიტი უტოლობების შეკრების შედეგად მივიღოთ სასურველი შედეგი.

აღსანიშნავია, რომ წარმოდგენილ ნაშრომში განხილული ამოცანებიდან პირველი ორი წარმოადგენს საკმაოდ ცნობილ უტოლობას (ნესბიტის უტოლობა და 2001 წლის მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადის ამოცანა), ხოლო მესამე ჩვენ შევქმენით სპეციალურად იმისთვის, რომ უფრო მეტი პრაქტიკული სავარჯიშო შეგვეთავაზებინა მკითხველისთვის, რათა მან შეძლოს წარმოდგენილი მეთოდის უკეთ გაცნობა.

საკვანძო სიტყვები: ოლიმპიადა, უტოლობები, არასტანდარტული, ამოხსნის მეთოდები

სასკოლო კურსში, კლასგარეშე მეცადინეობის დროს, მათემატიკის კონკურსზე ან ოლიმპიადაზე მოსწავლეებს ზოგჯერ უწევთ ამოხსნან უტოლობები, ან დაამტკიცონ მათი ჭეშმარიტება ცვლადის დასაშვები მნიშვნელობებისთვის. თუ ამოსახსნელი ან დასამტკიცებელი უტოლობა მცირედით მაინც ცდება სტანდარტულ წრფივ, მოდულის შემცველ, კვადრატულ, ირაციონალურ ან უბრალოდ ინტერვალთა მეთოდით ამოხსნად უტოლობას, ან უტოლობას რომლის დასამტკიცებლად საჭიროა გავიხსენოთ დამოკიდებულება დადებითი რიცხვითი მონაცემების საშუალო ჰარმონიულს,

გეომეტრიულს, არითმეტიკულს და კვადრატულს შორის, მაშინ მოსწავლეთა უმრავლესობას საკმაოდ უჭირს დასმული ამოცანის დაძლევა.

ნაშრომში განხილულია გარკვეული კატეგორიის უტოლებები და მათი ამოხსნა/დამტკიცების ერთ არასტანდარტული მეთოდი, რომელიც გულისხმობს იმას, რომ თუ დასამტკიცებელია უტოლობა fa+fb+fc+…≥1, მაშინ შევეცდებით შევარჩიოთ ისეთი k რიცხვი, რომ სამართლიანი იყოს უტოლობები: faakak+bk+ck+…; fbbkak+bk+ck+…; fcckak+bk+ck+… და შემდეგ ამ ჭეშმარიტი უტოლობების შეკრების შედეგად მივიღოთ სასურველი შედეგი.

აღსანიშნავია, რომ წარმოდგენილ ნაშრომში განხილული ამოცანებიდან პირველი ორი წარმოადგენს საკმაოდ ცნობილ უტოლობას (ნესბიტის უტოლობა და 2001 წლის მათემატიკის საერთაშორისო ოლიმპიადის ამოცანა), ხოლო მესამე ჩვენ შევქმენით სპეციალურად იმისთვის, რომ უფრო მეტი პრაქტიკული სავარჯიშო შეგვეთავაზებინა მკითხველისთვის, რათა მან შეძლოს წარმოდგენილი მეთოდის უკეთ გაცნობა.

ამოცანა №1. დაამტკიცეთ, რომ თუ a;b;c>0 მაშინ სამართლიანია უტოლობა

2a3b+3c+2b3a+3c+2c3a+3b≥1

ამოხსნა: როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ჩვენი მიზანია შევარჩიოთ ისეთი k რიცხვი, რომ სამართლიანი იყოს უტოლობები:

2a3b+3cakak+bk+ck;

2b3a+3cbkak+bk+ck;

2c3a+3bckak+bk+ck.

როგორ შევარჩიოთ k? ასე: 2a3b+3cakak+bk+ck უტოლობა რომ შესრულდეს აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს 2ak+2bk+2ck≥3bak-1+3cak-1. ცხადია, თუ გავიხსენებთ კლასიკურ უტოლობას სამი არაუარყოფითი რიცხვის საშუალო არითმეტიკულს და საშუალო გეომეტრიულს შორის მივიღებთ, რომ

ak+bk+bk≥33akb2k=3ak3b2k3

ეს უკანასკნელი კი გაუტოლდება 3bak-1-ს როცა k=32.

ანუ, გამოვიდა, რომ თუ k=32 მაშინ ak+bk+bk≥33akb2k=3ak3b2k3=3bak-1.

ანალოგიურად ak+ck+ck≥33akc2k=3ak3c2k3=3cak-1 რაც ნიშნავს 2a3b+3cakak+bk+ck უტოლობის ჭეშმარიტებას.

ცხადია, ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ როცა k=32 სამართლიანი იქნება 2b3a+3cbkak+bk+ck და 2c3a+3bckak+bk+ck უტოლობებიც.

დასკვნა, თუ k=32 მაშინ 2a3b+3c+2b3a+3c+2c3a+3bakak+bk+ck+bkak+bk+ck+ckak+bk+ck=1 რ.დ.გ.

ამოცანა №2. დაამტკიცეთ, რომ თუ a;b;c>0 მაშინ სამართლიანია უტოლობა

aa2+8bc+bb2+8ac+cc2+8ab≥1 (IMO 2001)

ამოხსნა: აქაც, ჩვენი მიზანია შევარჩიოთ ისეთი k რიცხვი, რომ სამართლიანი იყოს უტოლობები:

aa2+8bcakak+bk+ck;

bb2+8acbkak+bk+ck

cc2+8abckak+bk+ck.

aa2+8bcakak+bk+ck უტოლობა რომ შესრულდეს აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს ak+bk+ckak-1a2+8bc.

თუ უკანასკნელი (დასამტკიცებელი) უტოლობის ორივე მხარეს ავაკვადრატებთ (რისი უფლებაც ცხადია გვაქვს) მივიღებთ, რომ დასამტკიცებელია 2akbk+2akck+2bkck+b2k+c2k≥8a2k-2bc უტოლობა.

თუ გავიხსენებთ კლასიკურ უტოლობას რვა არაუარყოფითი რიცხვის საშუალო არითმეტიკულს და საშუალო გეომეტრიულს შორის მივიღებთ, რომ

akbk+akbk+akck+akck+bkck+bkck+b2k+c2k≥88a4kb6kc6k

ეს უკანასკნელი კი უდრის 8a2k-2bc-ს როცა k=43.

შედეგად, მივიღეთ რომ თუ k=43 მაშინ 2akbk+2akck+2bkck+b2k+c2k≥8a2k-2bc რაც aa2+8bcakak+bk+ck უტოლობის ტოლფასია.

ანალოგიურად დავრწმუნდებით bb2+8acbkak+bk+ck და cc2+8abckak+bk+ck უტოლობების ჭეშმარიტებაში, როდესაც k=43.

დასკვნა, თუ k=43 მაშინ aa2+8bc+bb2+8ac+cc2+8abakak+bk+ck+bkak+bk+ck+ckak+bk+ck=1.

ამოცანა №3. დაამტკიცეთ, რომ თუ a;b;c>0 მაშინ სამართლიანია უტოლობა

a3a3+26b3c3+b3a3+26a3c3+c3a3+26a3b3≥1

ამოხსნა: აქაც, ჩვენი მიზანია შევარჩიოთ ისეთი k რიცხვი, რომ სამართლიანი იყოს უტოლობები:

a3a3+26b3c3akak+bk+ck;

b3a3+26a3c3bkak+bk+ck

c3a3+26a3b3ckak+bk+ck.

a3a3+26b3c3akak+bk+ck უტოლობა რომ შესრულდეს აუცილებელია და საკმარისი შესრულდეს ak+bk+ckak-13a3+26b3c3.

თუ უკანასკნელი (დასამტკიცებელი) უტოლობის ორივე მხარეს ავიყვანთ კუბში (რისი უფლებაც ცხადია გვაქვს) მივიღებთ, რომ დასამტკიცებელია 3a2kbk+3a2kck+3b2kck+3akb2k+3akc2k+3bkc2k+b3k+c3k+6akbkck≥26a3k-3b3c3.

თუ გავიხსენებთ კლასიკურ უტოლობას ოცდაექვსი არაუარყოფითი რიცხვის საშუალო არითმეტიკულს და საშუალო გეომეტრიულს შორის მივიღებთ, რომ

a2kbk+a2kbk+a2kbk+a2kck+a2kck+a2kck+b2kck+b2kck+b2kck+akb2k+akb2k+akb2k+akc2k+akc2k +akc2k+bkc2k+bkc2k+bkc2k+b3k+c3k+akbkck+akbkck+akbkck+akbkck+akbkck+akbkck≥2626a24k b27kc27k

ეს უკანასკნელი კი უდრის 26a3k-3b3c3-ს როცა k=139.

შედეგად, მივიღეთ რომ თუ k=139 მაშინ 3a2kbk+3a2kck+3b2kck+3akb2k+3akc2k+3bkc2k+b3k+c3k+6akbkck≥26a3k-3b3c3, რაც a3a3+26b3c3akak+bk+ck უტოლობის ტოლფასია.

ანალოგიურად დავრწმუნდებით b3a3+26a3c3bkak+bk+ck და c3a3+26a3b3ckak+bk+ck უტოლობების ჭეშმარიტებაში,როდესაც k=139.

დასკვნა, თუ k=139 მაშინ

a3a3+26b3c3+b3a3+26a3c3+c3a3+26a3b3akak+bk+ck+bkak+bk+ck+ckak+bk+ck=1.

გამოყენებული ლიტერატურა:
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2001_IMO_Problems/Problem_2
https://en.wikipedia.org/wiki/Nesbitt%27s_inequality

Vladimer Adeishvili
Akaki Tsereteli State University
Ivane Gokadze
Andria Razmadze N41 Physics-Mathematics Public School of Kutaisi

The truth of the Olympic content inequalities about one method of approval

Abstract

The paper discusses certain categories of inequalities and one non-standard method of solving/proving them, which implies that if the inequality fa+fb+fc+…≥1, is to be proved, then we will try to choose a number k such that fair let there be inequalities: faakak+bk+ck+…; fbbkak+bk+ck+…; fcckak+bk+ck+… and then we get the desired result as a result of adding these true inequalities.
It should be noted that the first two of the problems discussed in the presented paper are quite well-known inequalities (Nesbitt's inequality and the problem of the 2001 International Mathematical Olympiad), and the third one we created specifically to offer more practical exercises to the reader so that he can get to know the presented method better.

Keywords: Olympiad, inequalities, non-standard, solution methods